Sciences & Technologie – **N°18**, Décembre (2002), pp. 24-27.

EQUATION DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU POUR UNE PARTICULE DE SPIN ZERO DANS UN POTENTIEL AHARONOV-BOHM COULOMBIEN A DEUX DIMENSIONS

Reçu le 28/07/2002 – Accepté le 18/12/2002

Résumé

Dans cet article, nous discutons le mouvement d'une particule de spin 0 décrite par l'équation Duffin Kemmer Petiau (DKP) et se déplaçant sous l'effet combiné de trois potentiels à deux dimensions : les potentiels Aharonov Bohm et de Coulomb (ABC) sont analysés. En considérant d'abord le potentiel de Aharonov Bohm (AB) seul et ensuite le potentiel de Coulomb (C), les spectres d'énergie ainsi que les fonctions d'onde ont été déterminés.

Mots clés: *Spin 0; Potentiel Coulombien; Potentiel Aharonov Bohm ; Equation Duffin Kemmer Petiau (DKP).*

Abstract

In this article, we discuss the interaction of particle of spin 0 with a potential Aharonov Bohm Coulomb (ABC) at two dimensions by the application the Duffin Kemmer Petiau (DKP) equation. The spectrum of energy and its dependence with the strength of the potential Aharonov Bohm (AB) and the parameter of the Coulomb potential is analyzed.

Key words: *Spin 0; Potential Coulomb; Aharonov Bohm potential; Duffin Kemmer Petiau equation (DKP).*

A. BOUMALI
Institut de physique
Université d'Annaba
BP 12 El Hadjar, 23000
Annaba, Algérie.

ملخص

في هذا المنشور, تطرقنا وناقشنا موضوع تفاعل جسيمة نسبية ذات سبين صفر مع كمون اهارونوف بوم كولوم (Aharonov-Bohm-Coulomb) وهذا بتطبيق معادلة ديفان كيمار بسيو(Duffin Kemmer Petiau)). فى فضاء دو بعدين. عدة نتائج مهمة وجدت ومن أبرزها تعلق الاطياف الطاقوية بشدة وطويلة الكمون اهارونوف بوم(Aharonov-Bohm) وبوسائط الكمون الكولومبى.

الكلمات المفتاحية *: جسيمة ذات سبين صفر, الكمون الكولومبى, كمون اهارونوف بوم (Aharonov-Bohm) معادلة ديفان كيمار بسيو (Duffin-Kemmer-Petiau).*

Nous nous proposons dans ce travail de solutionner l'équation Duffin Kemmer Petiau (DKP), équation d'onde relativiste de premier ordre similaire à l'équation de Dirac, pour une particule de spin 0 se déplaçant sous l'effet combiné de trois potentiels Aharonov-Bohm-Coulomb. Le potentiel de Coulomb étant le plus connu puisqu'il se rapporte aux problèmes de champs centraux. Récemment, le mouvement d'une particule de spin 1/2 dans un potentiel Aharonov-Bohm-Coulomb à deux et trois dimensions a été étudié [2,3]. Dans le présent travail, nous reprenons l'étude mais cette fois-ci pour des particules de spin 0 se déplaçant dans un potentiel de Aharonov-Bohm (AB) [1] et de Coulomb à deux dimensions en utilisant l'équation Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) équivalente à l'équation Klein-Gordon(KG) [5]. Physiquement, le système Aharonov-Bohm-Coulomb peut être généré respectivement par un flux Φ et par des sources extérieures. Nous étudions ce problème d'abord en considérant le potentiel AB seul et ensuite nous lui ajoutons le potentiel de Coulomb. Pour les deux cas, les coordonnées polaires (r,θ) ont été utilisées.

ASPECT THEORIQUE DE L'EQUATION DKP

L'équation DKP est la suivante [5]:

$$\left(i\beta^{\kappa}\partial_{\kappa} - \mu c^2\right)\psi = 0 \tag{1}$$

Dans le cas des bosons scalaires où vectoriels de masse μ, l'équation DKP relativiste libre s'écrit comme suit :

$$\left(c\beta \mathrm{p} + \mu c^2\right)\psi = i\hbar\beta^0 \frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2}$$

où les variables internes β^{κ} avec $(\kappa = 0,1,2,3)$, ici des matrices, satisfont aux relations suivantes [4,5] :

$$\beta^{\kappa}\beta^{\nu}\beta^{\lambda} + \beta^{\lambda}\beta^{\nu}\beta^{\kappa} = g^{\kappa\nu}\beta^{\lambda} + g^{\nu\lambda}\beta^{\kappa} \tag{3}$$

où $g^{\kappa\nu}$ est le tenseur métrique de l'espace temps de Minkowski. Rappelons que les matrices β^{κ} ont deux représentations irréductibles non triviales:

- L'une de dimension 5 correspondant aux particules de spin 0.
- L'autre de dimension 10 correspondant aux particules de spin 1.

Dans notre cas, nous nous limitons aux particules de spin 0 placées dans un potentiel Aharonov-Bohm-Coulomb. Les matrices β^{κ} ont la forme suivante [4]:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} v & \widetilde{0} \\ \overline{0}_T & 0 \end{pmatrix};\ \beta^i = \begin{pmatrix} \hat{0} & \rho^i \\ -\rho_T^i & 0 \end{pmatrix} \ \text{avec}\ i = 1,2,3 \tag{4}$$

où $\widetilde{0}, \hat{0}$ et 0 sont des matrices nulles de dimensions $2\times 3, 2\times 2$ et 3×3 et

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

L'état dynamique de système ψ est un spineur de dimension 5 qui s'écrit

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_{\text{upper}} \\ \mathrm{i}\psi_{\text{lower}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

dont

$$\psi_{upper} \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix} \text{et}\ \psi_{\text{lower}} \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Pour une particule de spin 0 qui interagit avec un potentiel Aharonov-Bohm-Coulomb à deux dimensions, l'équation (1) se généralise comme suit

$$\left(c\beta\left(\mathrm{p}\text{-}\frac{q}{c}\mathrm{AB}\right) + \mu c^2\right)\psi = \beta^0(E - qV)\psi \tag{8}$$

où **AB** et V avec $V = \frac{qk}{r}$ sont respectivement le potentiel Aharonov-Bohm et le potentiel coulombien supposé attractif. En utilisant les définitions des matrices β, l'équation (8) se réduit à un système d'équation comme suit

$$\begin{cases} \mu c^2\phi - M(iA_1) - N(iA_2) - K(iA_3) = (E - qV)\varphi \\ \mu c^2\varphi = (E - qV)\varphi \\ M\phi + \mu c^2(iA_1) = 0 \\ N\phi + \mu c^2(iA_2) = 0 \\ K\phi + \mu c^2(iA_3) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

avec M, N et K définies par les relations suivantes :

$$M = c\left(p_x - \frac{q}{c}AB_x\right)$$
$$N = c\left(p_y - \frac{q}{c}AB_y\right) \tag{10}$$
$$K = c\left(p_z - \frac{q}{c}AB_z\right)$$

Un calcul simple donne une équation différentielle pour la composante ϕ comme suit :

$$\left(c^2\left(\mathrm{p}\text{-}\frac{q}{c}\mathrm{AB}\right)^2 - \left((E - qV)^2 - \left(\mu c^2\right)^2\right)\right)\phi = 0 \tag{11}$$

SOLUTION DE L'EQUATION DKP

Particule de spin 0 dans un potentiel Aharonov-Bohm

Le potentiel Aharonov Bohm a pour composante

$$AB_x = -\frac{\Phi}{2\pi}\frac{y}{r^2}$$
$$AB_y = -\frac{\Phi}{2\pi}\frac{x}{r^2} \tag{12}$$
$$AB_z = 0.$$

La constante Φ correspond aux flux magnétique de Aharonov-Bohm. Comme premier résultat, la composante A_3 s'annule. L'équation (11) peut être écrite sous une autre forme comme suit

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla_{\mathrm{r}}\text{-}i\frac{q}{\hbar c}\mathrm{AB}\right)^2 - \frac{1}{2\mu c^2}\left(E^2 - \left(\mu c^2\right)^2\right)\right)\phi = 0 \tag{13}$$

que l'on écrit aussi

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla_{\mathrm{r}}\text{-}i\frac{q\Phi}{2\pi\hbar c}\nabla\theta\right)^2 - \frac{1}{2\mu c^2}\left(E^2 - \left(\mu c^2\right)^2\right)\right)\phi = 0 \tag{14}$$

où l'expression du potentiel Aharonov-Bohm dans les coordonnées polaires est

$$\mathrm{AB} = \frac{\Phi}{2\pi}\frac{1}{r}\mathrm{e}_\theta = \frac{\Phi}{2\pi}\nabla\theta$$
$$\nabla\theta = \frac{1}{r}\mathrm{e}_\theta \tag{15}$$

Posons que

$$\frac{q\Phi}{2\pi\hbar c} = m_0 \tag{16}$$

où $\Phi = m_0\Phi_0$ avec $\Phi_0 = \frac{hc}{q}$; le flux magnétique d'Aharonov-Bohm Φ est un multiple du flux magnétique Φ_0. L'équation DKP devient alors

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - im_0\right)^2 + \frac{E^2 - \mu^2c^4}{\hbar^2c^2}\right)\phi = 0 \tag{17}$$

Ecrivons ϕ de l'équation (17) comme un produit du deux solutions séparées : une radiale et l'autre angulaire. Alors

$$\phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \tag{18}$$

La partie angulaire suit l'équation différentielle suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - im_0\right)\Theta(\theta) = -m^2\Theta(\theta) \tag{19}$$

La solution est de la forme:

$$\Theta(\theta) = e^{i(m-m_0)\theta} \tag{20}$$

On écrit donc:

$$\phi(r,\theta) = R(r)e^{i(m-m_0)\theta} \tag{21}$$

Concernant la partie radiale, elle est régit par l'équation suivante:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\left(\frac{E^2-\mu^2c^4}{\hbar^2c^2}-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0 \qquad (22)$$

Soit $\frac{q\Phi}{2\pi\hbar c}=m_0+\nu=m+\nu$ avec m_0 est un entier et $0\le\nu\le1$.

Dans ce cas, on considère que le flux es une quantité non entière de Φ_0 .Posant que

$$k^2=\frac{E^2-\mu^2c^4}{\hbar^2c^2} \qquad (23)$$

$$p=m+\nu$$

L'équation différentielle de la partie radiale est alors

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\left(k^2-\frac{p^2}{r^2}\right)R(r)=0 \qquad (24)$$

Faisant un changement de variable $z=kr$, l'équation (24) est donc:

$$\frac{d^2R(r)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dR(r)}{dz}+\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)R(r)=0 \qquad (25)$$

L'équation (25) admet comme solution les *fonctions de Bessel* $j_{m+\nu}(kr)$ et on écrit alors

$$R(r)=N\,j_{m+\nu}(kr) \qquad (26)$$

avec *N* est la constante de normalisation. La composante ϕ d'après l'équation (21) s'écrit:

$$\phi_m(r,\theta)=N\,j_{m+\nu}(kr)e^{i(m-m_0)\theta} \qquad (27)$$

Le spineur total est donc:

$$\psi_m(r,\theta)=\begin{pmatrix}1\\ \frac{E}{\mu c^2}\\ \frac{-ic\left(p_x+\frac{q}{c}AB_x\right)}{\mu c^2}\\ \frac{-ic\left(p_y+\frac{q}{c}AB_y\right)}{\mu c^2}\\ 0\end{pmatrix}N\,j_{m+\nu}(kr)e^{i(m-m_0)\theta} \qquad (28)$$

Ce spineur peut aussi s'écrire d'une autre façon comme suit

$$\psi_m(r,\theta)=\begin{pmatrix}\varphi\\ \frac{E}{\mu c^2}\varphi\\ -\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)(\nabla-im_0\nabla\theta)\varphi\end{pmatrix} \qquad (29)$$

L'énergie total sera alors:

$$E=\pm\sqrt{(\hbar ck)^2+\mu^2c^4} \qquad (30)$$

Cette dernière a la forme de l'énergie d'une particule relativiste mouvant librement et le constant k est alors $k=\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2$ en le comparant avec la relation connue $E^2=c^2p^2+\mu^2c^4$.

Particule de spin 0 dans un potentiel Aharonov Bohm Coulombien

Introduisons dans l'équation (11) le potentiel Coulombien; on écrit donc:

$$\left(c^2\left(\text{p-}\frac{q}{c}\text{AB}\right)^2-\left((E-qV)^2-\left(\mu c^2\right)^2\right)\right)\phi=0 \qquad (31)$$

ou encore en fonction de (r,θ) en coordonnée polaire comme suit:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-im_0\right)^2+\frac{E^2-\mu^2c^4}{\hbar^2c^2}+\frac{2qEk}{\hbar^2c^2}\frac{1}{r}+\frac{\left(\frac{qk}{\hbar c}\right)^2}{r^2}\right]\varphi=0 \qquad (32)$$

Séparons comme auparavant les solutions en *r* et θ , on a donc:

$$\phi(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta) \qquad (33)$$

Pour la solution angulaire, on a toujours le même comportement décrit ci-dessus où:

$$\Theta(\theta)=e^{i(m-m_0)\theta} \qquad (34)$$

La partie radiale est régit par l'équation suivante

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}+Z(r)R(r)=0 \qquad (35)$$

avec

$$Z(r)=\frac{E^2-\mu^2c^4}{\hbar^2c^2}-\frac{2qkE}{\hbar^2c^2}\frac{1}{r}-\frac{(m+\nu)^2-\left(\frac{qk}{\hbar c}\right)}{r^2} \qquad (36)$$

Soit les variables suivantes:

$$\begin{cases}\rho=\xi r\\ \xi^2=\frac{4\left(\mu^2c^4-E^2\right)}{\hbar^2c^2}\\ \gamma=\frac{qk}{\hbar c}\\ \varsigma=\frac{2E\gamma}{\hbar c\xi}\end{cases} \qquad (37)$$

L'équation (35) se transforme à:

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{\varsigma}{\rho}-\frac{(m+\nu)^2-\gamma^2}{\rho^2}\right]R(\rho)=0 \qquad (38)$$

Introduisant la nouvelle variable $R(\rho)=e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^s u(\rho)$, l'équation (38), en fonction de $u(\rho)$, est donc

$$\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2}+\left(-1+\frac{2s}{\rho}\right)\frac{du(\rho)}{d\rho}-\left(\frac{s+\varsigma}{\rho}\right)u(\rho)=0 \qquad (39)$$

Multipliant cette équation par ρ , on a alors l'équation finale:

$$\rho\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2}+\frac{du(\rho)}{d\rho}(2s-\rho)-(s+\varsigma)u(\rho)=0 \qquad (40)$$

La constante *s* vérifiée la relation:

$$s(s-1)=(m+\nu)^2-\gamma^2 \qquad (41)$$

donc:

$$s=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4\left((m+\nu)^2-\gamma^2\right)}\right) \qquad (42)$$

La solution de l'équation (40) est

$$u(\rho)=NF(s+\varsigma;2s;\rho) \tag{43}$$

où $F(s+\varsigma;2s;\rho)$ est la fonction hypergéométrique [6]. Afin qua le partie $R(\rho)$ a une limite finie lorsque $\rho\to\infty$, il faut que la fonction $u(\rho)$ soit une série à des termes finies et on écrit dans ce cas la que

$$s+\varsigma=-n \tag{44}$$

avec n est entier non négatif. La constante s sera choisie d'après cette condition comme suit

$$s=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+4\left((m+\nu)^2-\gamma^2\right)}\right) \tag{45}$$

On obtient donc le spectre d'énergie quantifié comme suit:

$$E_{nm}=\frac{\mu c^2}{\sqrt{1+\dfrac{\gamma^2}{\left(n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4\left((m+\nu)^2-\gamma^2\right)}\right)^2}}} \tag{46}$$

On peut voir d'après (46) que:

- Si $\nu=m_0=0$ c'est-à-dire l'absence de l'effet Aharonov Bohm, l'énergie est donc celle d'une particule dans un potentiel Coulombien pur à deux dimensions.
- Si $\nu=0$ et $m_0\neq 0$, la quantité $\frac{q\Phi}{2\pi\hbar c}$ prend des valeurs entières différentes de zéro et les énergies sont tous égales.
- Si en annule le potentiel Coulombien, on trouve bien le cas du potentiel Aharonov Bohm et l'énergie est similaire à l'énergie d'une particule relativiste libre.

La composante ϕ s'écrit donc comme suit:

$$\phi_{nm}(r,\theta)=NF(-n;2s;\rho)e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^s e^{i(m-m_0)\theta} \tag{47}$$

Le spineur total de l'état dynamique est donc

$$\psi_{n,m}(r,\theta)=\begin{pmatrix}\varphi\\ \dfrac{E}{\mu c^2}\varphi\\ -\left(\dfrac{\hbar}{\mu c}\right)(\nabla-im_0\nabla\theta)\varphi\end{pmatrix} \tag{48}$$

avec s et ϕ définies par les équations (45) et (47) respectivement.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons étudié l'équation DKP pour une particule de spin 0 dans un potentiel Aharonov-Bohm Coulombien à deux dimensions. Le cas du potentiel AB seul, donne un spectre d'énergie non quantifié et similaire à celle d'une particule relativiste libre. Dans le cas combiné, le spectre est alors quantifié et dépend des paramètres du potentiel Aharonov-Bohm Φ et du potentiel Coulombien.

REFERENCES

[1]- Aharonov Y. and Bohm D., *Phys. Rev.*, 115 (1959).

[2]- Qiong-gui Lin, *Phys. Rev.*, 59 (1999).

[3]- Qiong-gui Lin, J. *Phys. A: Math. Gen*., 33, 5049-5057 (2000).

[4]- Nedjadi Y. et Barret R.C., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 4301-4318 (1994).

[5]-Lunardi J.T., Pimental B.M., Teixeira R.G. et Valverde J.S., hep-th /9911254.

[6]-Davydov A.S., "Quantum Mechanics", Pergamon Press (1976). ☐